1 Theoretische Mechanik

1.1 Einführung

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (BAC-CAP)

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ (Jacobi)

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ (Lagrange)

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

$s_i = (\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$

1.2 Newtonsche Gesetze

Lex Prima (Trägheitsgesetz)
Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.
Lex Secunda (Bewegungsgesetz)
Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.
Lex Tertia (Reaktionsgesetz)
Die Kräfte zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung (actio = reactio)

1.3 Schwingungen

Kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage x_0: Taylorreihe

$$F(x) = F(x_0) + \frac{\mathrm{d}F(x_0)}{\mathrm{d}x}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}(x-x_0)^2 + \dots$$

Nach Voraussetzung verschwindet $F(x_0) = 0$.
Labiles Gleichgewicht: $\frac{\mathrm{d}F(x_0)}{\mathrm{d}x} > 0$
Stabiles Gleichgewicht: $\frac{\mathrm{d}F(x_0)}{\mathrm{d}x} < 0$

1.3.1 Harmonischer Oszillator

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_0 \cos\omega_0 t$

$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0),\ A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \geq 0,\ \tan\delta_0 = \frac{v_0}{x_0\omega_0}$

Phasenraum: $\frac{x^2(t)}{A_0^2} + \frac{\dot{x}^2}{A_0^2\omega_0^2} = 1$

1.3.2 Gedämpfte Schwingungen

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Schwache Dämpfung: $x(t) = e^{-\lambda t}(C_1 \sin\overline{\omega}t + C_2\cos\overline{\omega}t)$

Starke Dämpfung: $x(t) = C_1 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}$

Kritische Dämpfung: $x(t) = e^{-\lambda t} C_1 \sin\overline{\omega}t$

1.3.3 Erzwungene Schwingungen

Allgmeine Lösung: $x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + \overline{A}e^{-\lambda t}\cos\big(\overline{\omega}t - \overline{\delta}\big)$

Resonanzfrequenz: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ (für $\omega_0^2 > 2\lambda^2$)

1.4 Erhaltungssätze

Impuls: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}) = 0$

Drehimpuls: $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}) = 0$

Lenzscher Vektor: $\vec{M} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - k \cdot \vec{e_r}$

konservative Kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

$E := T + U \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$

$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$

$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$

1.5 Gleichgewichtszustände

$$U(x) = U(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}U(x_0)}{\mathrm{d}x} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2U(x_0)}{\mathrm{d}x^2} + \dots$$

$\frac{\mathrm{d}U(x_0)}{\mathrm{d}x} = 0 \iff$ Gleichgewichtspunkt x_0

$U(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2U(x_0)}{\mathrm{d}x^2} + \mathcal{O}((x-x_0)^3)$

$\frac{\mathrm{d}^2U(x_0)}{\mathrm{d}x^2} > 0$ stabiles Gleichgewicht, (Potentialminimum)

$\frac{\mathrm{d}^2U(x_0)}{\mathrm{d}x^2} < 0$ labiles Gleichgewicht, (Potentialmaximum)

1.6 Newtonsche Gravitation

$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e_r} \quad G = 6,67428(67) \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Massenverteilung: $M = \int_V \mathrm{d}v'\,\rho(\vec{r'}) \Rightarrow \vec{F} = -Gm\int_V \frac{\rho(\vec{r'})\hat{e_r}}{r^2}\,\mathrm{d}v'$

$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{r^2}\hat{e_r}\,\mathrm{d}v' \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ bzw. $\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$

Graviationspotential: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \Phi = -G\frac{M}{r}$

1.7 Variationsrechnung

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x)\,\mathrm{d}x \implies 0 = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\,\mathrm{d}x$$

Euler-Gleichung: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$

$\lambda(x)$ heißt Lagrange-Multiplikator

$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0$

1.8 Hamiltonsches Prinzip

Lagrange-Funktion: $L = L(x_i, \dot{x}_i) := T - U$

Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(x_i, \dot{x}_i)$

Hamiltonsches Prinzip: $0 = \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L$

Euler-Lagrange-Gleichung $\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0}$

In verallg. Koordinaten: $L = T(q_j, \dot{q}_j; t) - U(q_j; t) = L(q_j, \dot{q}_j; t)$

1.8.1 Lagrange-Gleichungen 2. Art

$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, S$

1. Aufstellen der Zwangsbedingungen
2. Wahl von Koordinaten, die die Zwangsbedingungen erfüllen
3. Aufstellen der Transformation von kartesischen Koordinaten zu den generalisierten Koordinaten
4. Aufstellen der Lagrangefunktion in diesen Koordinaten
5. Ableitung der Lagrangegleichungen 2. Art
6. Lösen der DGL in den generalisierten Koordinaten

1.8.2 Lagrange Gleichungen 1. Art

Zwangsbedingung (holomon)
$g_j(q_i, t) = 0$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$

$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_j \lambda_j(t)\frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0$

1. Aufstellen der Zwangsbedingungen $g_i(\vec{r}, t) = 0$
2. Berechnen der Gradienten der Zwangsbedingungen $\vec{\nabla} g_i(\vec{r}, t)$
$\Rightarrow$ Zwangskräfte: $\vec{Z}_i = \lambda_i \cdot \vec{\nabla} g_i$
3. Aufstellen der Lagrangegleichungen 1. Art mit den Lagrange-Multiplikatoren λ

$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \cdot g_i(\vec{r}, t)$

4. Lösen des Gleichungssytems aus DGL + Zwangsbedingungen (zweimaliges Differenzieren der Zwangsbedingungen)
Zwangskraft verschwindet $\Leftrightarrow \lambda \cdot \vec{\nabla}(g) = 0$

1.9 Erhaltungssätze in Lagrange

1.9.1 Energieerhaltung

Homogenität der Zeit: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow L = L(q, \dot{q})$

Hamilton-Funktion $H := \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j q_j p_j - L = const.$

Energieerhaltung: $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$ und $x_i = x_i(q_j) \Rightarrow H = T + U = E$

1.9.2 Zyklische Koordinaten

Kanonischer Impuls: $p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$

$L = L(\dot{q}_i; t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \overset{\text{L unabh. von } q_i}{=} 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_k = 0$

q_i wird **Zyklische Koordinate** genannt.

Erhaltung des kanonischen Impulses: $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0}$

1.10 Noether-Theorem

$J(q, \dot{q}_i; t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tilde{t} - f(q, t) = const.$

1.11 Zwei-Körper Problem

$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2$ mit $M = m_1 + m_2$

$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M}\vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r}$

Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$

reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Schwerpunktsimpuls: $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const.$

$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r), \quad r = |\vec{r}|$

$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r), \quad l := \mu r^2\dot{\theta} = const.$

$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}$

$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2 \dot{r}}\mathrm{d}r \Rightarrow \theta(r) = \boxed{\int \frac{l/r^2\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu(E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2})}}}$

1.11.1 Das Kepler-Problem

$U(r) = -\frac{k}{r}$ Latus rectum: $\alpha = \frac{l^2}{\mu k}$ Exzentrizität: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$

Bewegungsgleichung (Kegelschnitt) $\boxed{\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta}$

$r_{min} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon) \quad r_{max} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon)$

$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|} \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$

1.12 Mechanik Systeme von Massepunkten

$\vec{X} := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i, \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

$M\ddot{\vec{X}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(e)} \Rightarrow \vec{X}(t) = \vec{X}_0 + \frac{\vec{P}}{M}(t - t_0), \quad M\dot{\vec{X}} = \vec{P} = const.$

1.12.1 Gesamtdrehimpuls und Energie

$\vec{L} := \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_i m_i(\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i) \quad \vec{M} := \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{L} = \vec{X} \times M\dot{\vec{X}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i' \times m_i \dot{\vec{x}}_i'$

$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{\vec{x}}_i^2 \quad V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ji} + \sum_i V_i^{(e)} \quad E = T + V = const.$

1.12.2 Elastische 2-Körper Stöße

$|\vec{v}_1'| = |\tilde{\vec{v}}_1'| \quad , \quad |\vec{v}_2'| = |\tilde{\vec{v}}_2'|$ Streuwinkel: $\tan\theta_1 = \boxed{\frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{m_1}{m_2}}}$

$m_1 \ll m_2 : \theta_1 \approx \theta', \quad m_1 < m_2 : 0 \leq \theta_1 \leq \pi$

$m_1 \geq m_2 : \sin\theta_{1\ max} = \frac{\tilde{v}_1'}{|\dot{\vec{X}}|} = \underline{\frac{m_2}{m_1}}, \quad m_1 = m_2 : \theta_1 = \frac{\theta'}{2}$

1.13 Rutherford Streuung

$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta'}{2}} - 1\right)\frac{k^2}{m^2 v_0^4}, \quad E = \frac{m}{2}v_0^2 \quad , \quad \ell = bmv_0$ **Streuquerschnitt**

Differenzieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = b\left|\frac{\partial b}{\partial\theta}\right|\frac{1}{\sin\theta} = \frac{k^2}{4(2E)^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$

Rutherfordsche Streuformel: $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{(ze^2)^2}{4(2E)^2}\frac{1}{sin^4\frac{\theta}{2}}$ (z = Ladungszahl)

Streuung kleiner Winkel: $\theta = -\frac{2b}{m_y v_0^2}\int_b^\infty \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - b^2}}$

1.14 Bewegte Bezugssysteme

KS' - Inertialsystem, KS - Bewegtes System

$\vec{x}'(t) = \vec{a}'(t) + R(t)\cdot\vec{x} \qquad \dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{a}}' + R\cdot(\dot{\vec{x}} + R^\intercal\dot{R}\cdot\vec{x})$

Bewegungsgleichung:

$m\ddot{x} + m[\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x})] + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})] + m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})] = -\boldsymbol{\nabla}V$

a) Änderung der Drehachse: $m[\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x})] \approx 0$ (auf der Erde)

b) Coriolis-Kraft: $\vec{F}_C := -2m(\vec{\omega} \times \dot{x}) = 2m(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}) =: \vec{F}_C$

c) Zentrifugalkraft: $\vec{F}_z := m((\vec{\omega} \times \vec{x}) \times \vec{\omega})$

d) Beitrag zur Erdbeschleunigung: $m((\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega})$

1.15 Starre Körper

Trägheitstensor: $\Theta_{jk} := \boxed{\sum_{I=1}^{N} m_I\left(\vec{x}_I^2\delta_{jk} - x_{I_j}x_{I_k}\right)}$

kontinuierliche Massendichte: $\Theta_{jk} := \int \mathrm{d}^3x\rho(\vec{x})(\vec{x}^2\delta_{jk} - x_jx_k)$

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\omega^2\hat{n}_1\Theta\hat{n}_1 = \frac{1}{2}\omega^2\Theta_1\hat{n}_1^2 = \frac{1}{2}\Theta_1\omega^2$

Drehimpuls: $\vec{L} = R^T\vec{L}' = \sum_i m_i\left[\vec{x}_i^2\vec{\omega} - \vec{x}_i(\vec{x}_i \bullet \vec{\omega})\right] = \Theta\vec{\omega}$

Satz von Steiner: $\hat{n}^T\Theta\hat{n} = \hat{n}^T\Theta^*\hat{n} + M\ell^2$

Θ^* : Θ im körperfesten System mit SP im Ursprung.